Du paradoxe de Saint-Pétersbourg aux diffusions anormales

par Denis Grebenkov

La notion du hasard peut toujours révéler des surprises et déranger le confort de nos habitudes quotidiennes. Cet article démarre par un vieux paradoxe probabiliste du 18-ième siècle qui a suscité de nombreuses discussions et stimulé des développements importants en théorie de jeux, en économie, et même en sciences sociales. Ce paradoxe a été énoncé en 1713 par Nicolas Bernoulli et publié par Daniel Bernoulli dans les Transactions de l'Académie de Saint-Pétersbourg, d'où vient son nom[1,2]. Le paradoxe se formule de manière très simple. Imaginons que la banque vous propose le jeu de pile ou face suivant. On lance une pièce de monnaie, et si face apparaît, la banque vous paie 1 euro, et on arrête le jeu. Sinon, on relance la pièce, et si face apparaît, la banque vous paie 2 euros, et on arrête le jeu. Sinon, on relance la pièce, et si face apparaît, la banque vous paie 4 euros, et ainsi de suite. Donc, si face apparaît pour la première fois au n-ième lancer, la banque vous paie 2^{n-1} euros. De combien d'euros êtes-vous d'accord à payer à la banque pour participer à ce jeu avantageux ? Dix euros ? Mille euros ? Etes-vous prêt de vendre votre appartement pour participer ?

Pour estimer vos chances et répondre à cette question, on peut calculer votre gain moyen espéré de ce jeu :

$$\langle g \rangle = 1€\cdot(1/2) + 2€\cdot(1/4) + 4€\cdot(1/8) + \ldots + 2^{n-1}€\cdot(1/2^n) + \ldots = \infty,$$

où le n-ième terme est votre gain (2^{n-1}€) si face apparaît pour la première fois au n-ième lancer, multiplié par la probabilité de cet événement ($1/2^n$). La théorie des probabilités vous donne une réponse simple mais paradoxale : il faut payer tout prix pour participer à ce jeu car votre gain espéré est infini. Etes-vous donc convaincu à payer un million d'euro ? Si oui, il est probablement temps de prendre les vacances.

De nombreuses explications et solutions à ce paradoxe ont été proposées. Bernoulli lui-même a fait appel aux aspects physiologiques de l'estimation des avantages du jeu par chaque individu. L'intérêt et l'utilité de ce jeu ne sont pas uniquement liés à la valeur du gain potentiel, mais aussi au capital de l'individu et à son aversion au risque, la notion physiologique qui a été largement exploitée dans les modèles économiques du 20-ième siècle. Bernoulli a proposé de remplacer le gain moyen espéré par une fonction d'utilité ce qui a donné naissance à la théorie de la prise de décision. Cette fonction d'utilité prend en compte, de manière empirique, l'aversion au risque qui croit avec le capital engagé (vous êtes plus prudent en lisant le contrat d'achat de votre maison que la facture d'un ticket de transport). Bernoulli a choisi une fonction logarithmique, $U(x) = \ln(x)$, pour laquelle l'utilité moyenne espérée du jeu devient finie

$$\langle U \rangle = \ln(1)\cdot(1/2) + \ln(2)\cdot(1/4) + \ln(4)\cdot(1/8) + \ldots + \ln(2^{n-1})\cdot(1/2^n) + \ldots = \ln(2).$$

Comme le choix de la fonction d'utilité reste assez arbitraire, cette solution n'est pas complètement satisfaisante.

Sans rentrer trop dans l'analyse socio-économique de ce problème, il est utile de mentionner un aspect trivial : ce jeu est évidemment idéalisé et non-réalisable en pratique parce que le capital de la banque (et donc le gain maximal) est fini. Par exemple, si ce capital est limité à 10 milliards d'euro, le jeu ne peut pas continuer après $N=\log_2(10^{10}) \approx 33$ lancers de la pièce. Si l'on intégrait cette contrainte dans les règles du jeu, le gain moyen espéré serait N/2. Alors, on s'approche tout de suite du prix des loteries habituelles. De manière similaire, la « stratégie gagnante » au casino consiste à doubler sa mise après chaque échec. Quelque soit les règles du jeu, cette stratégie vous permet de gagner surement à condition (irréaliste) que vous puissiez continuer à jouer sans limite (c'est-à-dire que votre capital initial est infini). Etes-vous toujours motivé à jouer ?

Plus récemment, O. Peters a proposé une autre résolution de ce paradoxe en introduisant une version répétitive du jeu et en étudiant la moyenne temporelle du gain[3]. En effet, si le jeu est profitable, on souhaiterait continuer à jouer de manière répétitive, et on peut donc se demander à quelle condition le capital augmentera progressivement (ou au moins restera stable au cours du temps, pour trouver un seuil d'utilité de ce jeu, et donc, le prix justifié à payer pour participer). Omettant les calculs techniques, le résultat principal de Peters est que le gain moyenné au cours du temps est différent du gain moyenné sur l'ensemble, c'est-à-dire que la dynamique du jeu n'est pas *ergodique*. La notion d'ergodicité est fondamentale pour la physique statistique et la théorie des systèmes dynamiques. En gros, l'ergodicité est l'équivalence entre la moyenne réalisée par de nombreuses mesures indépendantes et la moyenne réalisée par une longue observation d'un même système. La physique statistique traite des systèmes composés d'un nombre gigantesque de composants (par exemple, d'atomes ou de molécules) et les observables macroscopiques sont typiquement obtenues en moyennant des contributions microscopiques (par exemple, le signal de résonance magnétique nucléaire est produit par des contributions minuscules des noyaux). En revanche, la dynamique des systèmes désordonnés (comme des verres), des milieux actifs (comme des cellules vivantes) ou des cours de bourse est souvent non-ergodique[4,5]. La non-ergodicité pose de grands défis statistiques pour l'analyse et l'interprétation des données expérimentales. A titre d'exemple, on discute brièvement ce problème dans le contexte du vivant.

Divers techniques optiques (telles que caméras rapides ou pinces optiques) permettent de suivre en temps réel le mouvement d'une organelle à l'intérieur d'une cellule vivante. Ce mouvement résulte d'une compétition entre la diffusion thermique passive dans le cytoplasme surencombré et le transport actif par des protéines motrices attachées aux microtubules du cytosquelette[6]. Les trajectoires observées révèlent souvent des diffusions anormales dont les origines, les mécanismes, et les conséquences biologiques restent mal compris. Comme les organelles se déplacent dans le cytoplasme spatialement hétérogène et évoluant en temps, une moyenne d'ensemble des quantités d'intérêt (par exemple, diffusivité) sur plusieurs trajectoires est fréquemment indisponible (difficile de répéter l'expérience) ou même indésirable (difficile d'interpréter l'expérience). On fait face donc à un problème fondamental de pouvoir *inférer* les propriétés dynamique, structurale et fonctionnelle des cellules vivantes à partir d'un nombre limité (voire, petit) des réalisations aléatoires d'un processus stochastique inconnu.

De nombreuses questions se posent immédiatement : Quelles sont les caractéristiques pertinentes à estimer à partir d'une trajectoire aléatoire observée ? Comment peut-on choisir un modèle adéquat pour estimer les paramètres ? Quelle méthode d'inférence utiliser ? Quelles sont les exigences pratiques sur la longueur de la trajectoire et sur le niveau de bruit pour que les estimations soient fiables ? Mais avant tout, la première question à répondre est si ce processus est ergodique ou pas, car la réponse négative mettrait en doute des démarches statistiques basées sur une seule trajectoire.

Afin de répondre à ces questions, il est utile d'abord à s'entrainer sur des modèles simplifiés telles que mouvement brownien fractionnaire, marches aléatoires à temps continu (MATC), diffusion sur des fractales, etc. En particulier, le modèle MATC, proposé initialement par Montroll et Weiss et utilisé pour décrire le transport anormal dans des solides amorphes[7,8], est connu pour sa dynamique non-ergodique[9]. Dans ce modèle, un « marcheur » attend un temps aléatoire entre deux déplacements consécutifs ce qui peut modéliser l'effet d'une piège géométrique (par d'autres organelles) ou énergétique (par un puits profond d'un potentiel d'interaction). Si le temps d'attente *moyen* est comparable à la durée de l'expérience, la dynamique devient non-ergodique. A titre d'exemple, on considère le déplacement quadratique pendant le temps t : $[X(t) - X(0)]^2$. C'est une variable aléatoire dont les réalisations sont largement dispersées. Pour réduire la dispersion, on prend la moyenne temporelle « en glissant » cette expression le long d'une trajectoire observée pendant le temps T,

$$\langle \Delta X(t)^2 \rangle_T = \frac{1}{T-t} \int_0^{T-t} dt_0 \, [X(t_0 + t) - X(t_0)]^2.$$

Bien que cette moyenne temporelle soit également aléatoire, cette procédure permet de diminuer son écart-type et donc avoir une estimation plus précise.

Pour une diffusion normale, lorsqu'on augmente la longueur T de la trajectoire, la moyenne temporelle converge vers la moyenne d'ensemble,

$$\langle \Delta X(t)^2 \rangle_T \to \langle \Delta X(t)^2 \rangle_E = 2Dt,$$

tandis que son écart-type tend vers 0. Ceci est un exemple d'un comportement ergodique : si l'on observe une trajectoire suffisamment longue¸ la particule explore tout l'espace des phases et donc reproduit la moyenne d'ensemble. Notons que le coefficient de diffusion D peut être estimé comme $\langle \Delta X(t)^2 \rangle_T / (2t)$ à partir une seule trajectoire. En revanche, si X(t) est une marche aléatoire à temps continu, la moyenne temporelle ne converge plus vers la moyenne d'ensemble et son écart-type ne disparait pas. Dans ce cas, quelque soit la longueur de la trajectoire observée, elle n'arrive pas à explorer l'espace de phase et donc à acquérir les informations sur la dynamique. Dans ce modèle, la non-ergodicité vient de la possibilité d'avoir des temps d'attente extrêmement longs.

Récemment, M. Magdziarz et A. Weron ont proposé un test d'ergodicité basé sur les fonctionnelles dynamiques d'une trajectoire aléatoire[10]. Comme chaque trajectoire X(t) s'enregistre de manière discrète (à pas de temps δ), l'estimateur s'est aussi formulé sous une forme discrète :

$$E(n) = \frac{1}{N-n+1}\sum_{k=0}^{N-n}\exp(i\cdot[X(k+n)-X(k)]) - \left|\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\exp\big(i\cdot X(k)\big)\right|^2 ,$$

où N+1 est nombre des points dans la trajectoire, et X(0), X(1), … X(N) sont des positions successives. Lorsque n augmente, l'estimateur prend des petites valeurs *si* le processus est ergodique. Mais petit par rapport à quoi ? Peut-on définir un seuil pour séparer les cas ergodique et non-ergodique ? La réponse à ces questions est compliquée, surtout que l'estimateur E(n) reste une variable aléatoire. En effet, comme on ne dispose que d'une seule réalisation aléatoire d'un processus stochastique, toute conclusion sur ses propriétés reste de nature probabiliste. Par exemple, au lieu de dire que la trajectoire X(t) est générée par un processus non-ergodique, on peut juste constater que la trajectoire X(t) est *probablement* générée par un processus non-ergodique, avec une telle probabilité. Ceci est le prix qu'on paie pour se permettre d'analyser une seule trajectoire. Bien que ce test ait été validé sur quelques jeux de données expérimentales et simulées, il restait assez qualitatif.

Pour donner une réponse probabiliste à ces questions, il faut étudier la distribution de l'estimateur pour des processus ergodiques et non-ergodiques. Dans le cadre du stage M2 de Yann Lanoiselée, nous avons amélioré ce test en le rendant plus quantitatif pour quelques modèles de la diffusion anormale. En particulier, la moyenne et l'écart-type de l'estimateur ont été calculés analytiquement pour la diffusion normale, tandis que sa distribution a été étudiée numériquement pour divers modèles. Ces premiers résultats donnent un point de repère pour tester l'ergodicité des trajectoires observées dans les cellules vivantes. Nous espérons que cette étude serait continuée dans le cadre de la thèse de Yann. Dans le cadre encore plus général, les questions brièvement discutées dans cet article rentrent dans le projet ANR « INADILIC » (2014-2018) qui a pour but de rassembler des expertises en physique, statistique et biologie pour développer une procédure d'inférence fiable.

Références :

1. Wikipedia : *Paradoxe de Saint-Pétersbourg* [http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Saint-Petersbourg].
2. D. Bernoulli, *Specimen theoriae novae de mensura sortis*, in Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 5 (1738).
3. O. Peters, *The time resolution of the St Petersburg paradox*, Phil. Trans. R. Soc. A **369**, 4913-4931 (2011).
4. J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications*, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
5. J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Theory of Finantial Risks: From Statistical Physics to Risk Management* (Cambridge University Press, 2000).

6. E. Barkai, Y. Garini, and R. Metzler, *Strange kinetics of single molecules in living cells*, Physics Today **65**, 29 (2012).
7. E. W. Montroll and G. H. Weiss, *Random Walks on Lattices. II*, J. Math. Phys. **6**, 167 (1965).
8. H. Scher and E. W. Montroll, *Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids*, PRB 12, 2455 (1975)
9. R. Metzler and J. Klafter, *The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach*, Phys. Rep. **339**, 1 (2000).
10. M. Magdziarz and A. Weron, *Anomalous diffusion: Testing ergodicity breaking in experimental data*, Phys. Rev. E **84**, 051138 (2011).